Треугольники

Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки -- его *сторонами.*

Виды треугольников

Треугольник называется *равнобедренным,* если у него две сторны равны. Эти равные стороны называются *боковыми сторонами,* а третья сторона называется *основанием* треугольника.

Треугольник, у которого все сторны равны, называется *равносторонним* или *правильным.*

Треугольник называется *прямоугольным,* если у него есть прямой угол, то есть угол в 90°. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой,* две другие стороны называются *катетами.*

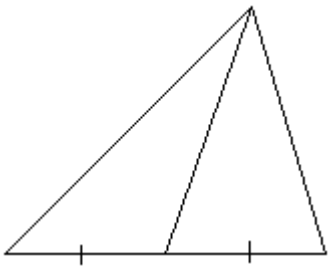
Треугольник называется *остроугольным,* если все три его угла — острые, то есть меньше 90°.

Треугольник называется *тупоугольным,* если один из его углов — тупой, то есть больше 90°.

Основные линии треугольника

Медиана

Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий верщину треугольника с серединой противолежащей стороны этого треугольника.

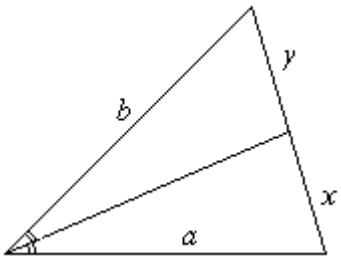


Свойства медиан треугольника

1. Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади.
2. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. Эта точка называется *центром тяжести* треугольника.
3. Весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников.

Биссектриса

Биссектриса угла — это луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит данный угол пополам. *Биссектрисой треугольника* называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противолежащей стороне этого треугольника.

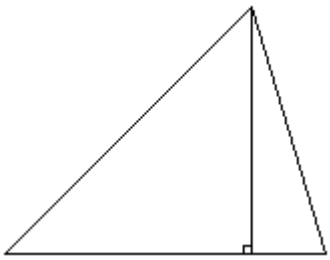


Свойства биссектрис треугольника

1. Биссектриса угла — это геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла.
2. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилегажащим сторонам: $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$.
3. Точка пересечения биссектрис треугольника является центром окружности, вписанной в этот треугольник.

Высота

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону этого треугольника.



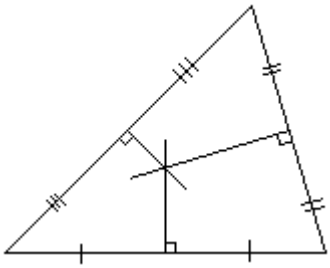
Свойства высот треугольника

1. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.
2. В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники.

Срединный перпендикуляр

Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, называют *серединным перпендикуляром* к отрезку.

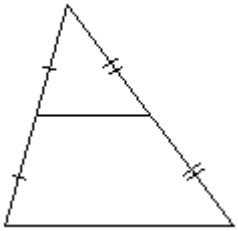
Свойства серединных перпендикуляров треугольника



1. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Верно и обратное утверждение: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.
2. Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является центром окружности, описанной около этого треугольника.

Средняя линия

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

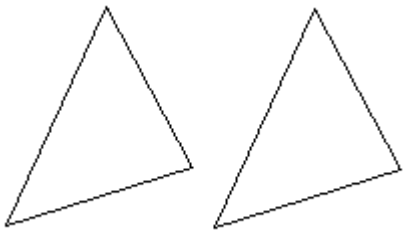


Свойство средней линии треугольника

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Формулы и соотношения

Признаки равенства треугольников

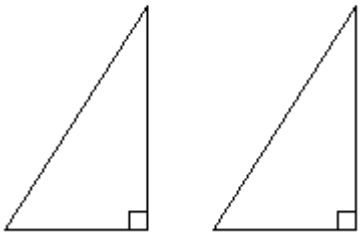


Два треугольника равны, если у них соответственно равны:

- две стороны и угол между ними;
- два угла и прилежащая к ним сторона;
- три стороны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

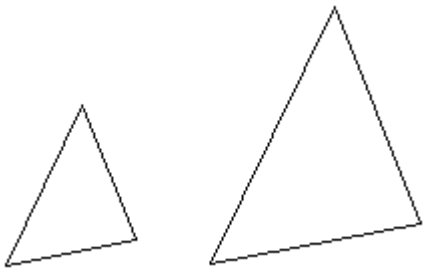
Два прямоугольных треугольника равны, если у них соответственно равны:



- гипотенуза и острый угол;
- катет и противолежащий угол;
- катет и прилежащий угол;
- два катета;
- гипотенуза и катет.

Подобие треугольников

Два треугольника *подобны,* если выполняется одно из следующих условий, называемых *признаками подобия:*



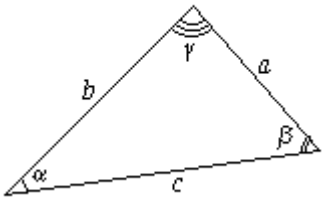
- два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника;
- две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами, равны;
- три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

В подобных треугольниках соответствующие линии (высоты, медианы, биссектрисы и т. п.) пропорциональны.

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, причем коэффициент пропорциональности равен диаметру описанной около треугольника окружности:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Формулы площади треугольника

1. **Произвольный треугольник**

   a, b, c — стороны; α — угол между сторонами a и b; $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; S — площадь; h_a — высота, проведенная к стороне a.

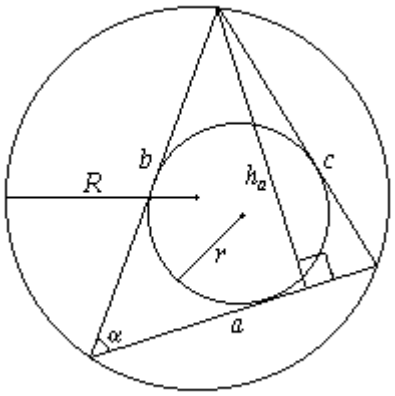
$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

$$S = \frac{1}{2} ab\sin\alpha$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = pr$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

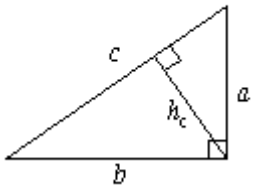


2. **Прямоугольный треугольник**

   a, b — катеты; c — гипотенуза; h_c — высота, проведенная к стороне c.

$$S = \frac{1}{2} ab$$

$$S = \frac{1}{2} ch_c$$



3. **Равносторонний треугольник**

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$